Marius Burtea

Georgeta Burtea

MATEMATICĂ

Culegere de exerciții și probleme

– clasa a XII-a –

M1

EDITURA CARMINIS PITEȘTI

CUPRINS

ALGEBRĂ

ANALIZĂ MATEMATICĂ

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I
GRUPURI

Noțiuni teoretice

◆ Fie M o mulțime nevidă. O aplicație $\varphi : M \times M \to M, (x, y) \to \varphi(x, y)$ se numeşte **lege de compoziție (operație algebrică)** pe mulțimea M.

◆ Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a \in \mathbb{Z}$. Restul împărțirii lui a la n se notează $a \bmod n$ (se citeşte "a modulo n") şi se numeşte **redusul modulo n** al numărului a.

◆ Legea de compoziție $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \oplus b = (a+b) \bmod n$ se numeşte **adunarea modulo n**.

◆ Legea de compoziție $\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \odot b = (a \cdot b) \bmod n$ se numeşte **înmulțirea modulo n**.

◆ Fie $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, ..., \widehat{n-1}\}$ mulțimea claselor de resturi modulo n. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ se definesc operațiile algebrice:

"+" : $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b}$, numită **adunarea claselor de resturi modulo n**;

"·" : $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b}$, numită **înmulțirea claselor de resturi modulo n**.

◆ Fie M o mulțime şi "$\circ$" o operație algebrică pe M. Submulțimea $S \subset M$ se numeşte **parte stabilă** a mulțimii M în raport cu operația "$\circ$" dacă $\forall\ x, y \in S \Rightarrow x \circ y \in S$.

◆ Legea de compoziția "$\circ$" se numeşte **comutativă** pe M dacă $x \circ y = y \circ x$, $\forall\ x, y \in M$.

◆ Legea de compoziție "$\circ$" se numeşte **asociativă** pe M dacă $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $\forall\ x, y, z \in M$.

O mulțime M înzestrată cu una sau mai multe legi de compoziție care satisfac un set de axiome date sub formă de identități sau alte condiții, formează o **structură algebrică**.

◆ Se numeşte **semigrup** o pereche $(S, \circ)$ care îndeplineşte axioma de asociativitate:

$S_1 : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall\ x\ y, z \in S.$

Un semigrup $(S, \circ)$ se numeşte **semigrup comutativ** sau **abelian** dacă îndeplineşte axioma de comutativitate:

$S_2 : x \circ y = y \circ x, \forall\ x, y \in S.$

Legea de compoziție "$\circ$" admite element neutru pe M dacă există $e \in M$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in M, (1)$.

◆ Elementul $e \in M$ cu proprietatea (1) se numeşte **element neutru** în raport cu legea "$\circ$".

◆ Perechea $(M, \circ)$ se numeşte **monoid** dacă verifică axiomele:

M_1 : Axioma asociativității: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in M$.

M_2 : Axioma elementului neutru: $\exists e \in M$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in M$.

◆ Un monoid $(M, \circ)$ se numeşte **monoid comutativ** sau **abelian** dacă legea "$\circ$" este comutativă.

◆ Un element $x \in M$ se numeşte **simetrizabil** în raport cu legea "$\circ$" dacă $\exists x' \in M$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = e, (2)$.

Elementul $x' \in M$ cu proprietatea (2) se numeşte **simetricul** lui $x \in M$ în raport cu legea "$\circ$".

Se notează cu $\mathcal{U}(M)$ mulțimea elementelor din M simetrizabile în raport cu legea "$\circ$".

Au loc egalitățile:

$(x')' = x$ şi $(x \circ y)' = y' \circ x', \forall x, y \in \mathcal{U}(M)$.

◆ Perechea $(G, \circ)$ se numeşte **grup** dacă au loc axiomele:

G_1 : Axioma monoidului: $(G, \circ)$ este monoid.

G_2 : Axioma elementelor simetrizabile: $\forall x \in G, \exists x' \in G$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = e$.

Un grup $(G, \circ)$ se numeşte comutativ (abelian) dacă legea "$\circ$" este comutativă.

◆ Un grup $(G, \circ)$ se numeşte **grup finit** dacă mulțimea G este mulțime finită. Cardinalul mulțimii G se numeşte **ordinul grupului** şi se notează cu $\operatorname{ord}(G)$.

Fie $a \in G$ şi $n \in \mathbb{Z}$. Se notează $a^0 = e, a^n = \underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{n \text{ ori}}$, pentru $n > 0$ şi $a^n = \underbrace{a' \circ a' \circ \ldots \circ a'}_{-n \text{ ori}}$, dacă $n < 0$.

Au loc relațiile: $a^m \circ a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, \forall a \in G, m, n \in \mathbb{Z}$.

◆ Fie $(G_1, \circ)$ şi $(G_2, *)$ două grupuri.

Funcția $f : G_1 \to G_2$ se numeşte **morfism de grupuri** dacă $f(x \circ y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in G_1$ **şi izomorfism de grupuri** dacă funcția f este şi funcție bijectivă.

Grupurile $(G_1, \circ)$ şi $(G_2, *)$ se numesc **izomorfe** şi se scrie $G_1 \simeq G_2$ dacă există un izomorfism $f : G_1 \to G_2$.

Un izomorfism $f : G \to G$ se numeşte **automorfism** al grupului G. Mulţimea automorfismelor lui G se notează $\mathrm{Aut}(G)$.

Un morfism $f : G \to G$ se numeşte **endomorfism** al grupului G.

Dacă $f : G_1 \to G_2$ este morfism de grupuri, au loc relaţiile $\forall\ x \in G$ şi $n \in \mathbb{Z}$:

a) $f(e) = e'$; **b)** $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$; **c)** $f(x^n) = (f(x))^n$.

◆ O submulţime $S \subset G$ se numeşte **subgrup** al lui $(G, \circ)$ dacă $(S, \circ)$ este grup.

Submulţimea $S \subset G$ este subgrup al lui $(G, \circ)$ dacă $\forall\ x, y \in S \Rightarrow xy^{-1} \in G$.

Fie $(G, \circ)$ un grup. Mulţimea $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ reprezintă subgrupul generat de elementul $a \in G$. Ordinul subgrupului $\langle a \rangle$ se numeşte **ordinul elementului** a şi se notează $\mathrm{ord}(a)$.

Ordinul elementului $a \in G$ este cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care $a^n = e$.

◆ **Teorema lui Lagrange**

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit, $H \subset G$ un subgrup şi $a \in G$. Atunci:

a) $\mathrm{ord}(H)$ divide $\mathrm{ord}(G)$;

b) $\mathrm{ord}(a)$ divide $\mathrm{ord}(G)$.

◆ **Teorema lui Cauchy**

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit, $n = \mathrm{ord}(G)$ şi p un divizor număr prim al lui n. Atunci există $a \in G$ astfel încât $p = \mathrm{ord}(a)$.

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{mn}$ dacă şi numai dacă $(m, n) = 1$.

1.1. Legi de compoziţie pe o mulţime

❑ **1.** Pe mulţimea $M = \{0, 1, 2, 3\}$ se defineşte operaţia algebrică $x \circ y = \max(x, y)$.

a) Să se rezolve ecuaţiile $x \circ 2 = 3$ şi $(y^2 - 2) \circ y = 2$.

b) Să se alcătuiască tabla lui Cayley a operaţiei "$\circ$".

❑ **2.** Să se alcătuiască tabla operaţiei algebrice pe mulţimea M în cazurile:

a) $M = \{2, 3, 4, 6, 8\}$, $x \circ y = \min(x, y)$;

b) $M = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, $x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$;

c) $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $x \circ y = |x - y|$;

d) $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $x \circ y = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$;

e) $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 2| \le 3\}$, $x \circ y = \operatorname{sign}(x + y)$;

f) $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 1| \le 7\}$, $x \circ y = \begin{cases} x, & x + y \le 7 \\ y, & x + y > 7 \end{cases}$.

❑ **3.** Pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ se consideră legea de compoziție "$\circ$" a cărei tablă este dată alăturat.

$\circ$	1	2	3	4
1	1	3	4	1
2	1	3	4	2
3	2	1	3	4
4	4	3	2	1

a) Să se determine elementele
$a = 1 \circ (2 \circ 3)$, $b = 4 \circ (3 \circ 2)$, $c = (1 \circ 2) \circ (3 \circ 4)$.

b) Să se rezolve ecuațiile:
$x \circ 2 = 4$, $4 \circ y = 2$, $z \circ 2 \circ z = 1$.

c) Să se rezolve sistemele de ecuații: $\begin{cases} x \circ 2 = y \\ y \circ 2 = x \end{cases}$; $\begin{cases} x \circ y = 1 \\ (x + 1) \circ y = 1 \end{cases}$.

❑ **4.** Pe mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset \mathbb{N}$, se consideră operațiile algebrice:
$x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$ şi $x \top y = |x - y|$.

a) Să se rezolve ecuațiile: $x \circ 4 = 2$, $y \circ 3 = 1$, $4 \circ z = 2$, $t \top 6 = t \circ 6$.

b) Să se rezolve sistemele de ecuații: $\begin{cases} x \circ y = y \\ x \circ 4 = y \top 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \top y = 0 \\ (x \circ y) \top 4 = 2 \end{cases}$.

❑ **5.** Pe mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N} \mid |x - 1| \le 4\}$ se consideră operația algebrică

$$x \circ y = \begin{cases} x - y, & x > 3 \text{ şi } y \le 3 \\ x + |x - y|, & x \le 3 \text{ sau } y > 3. \\ 0, & x = 5 \text{ şi } y = 4 \end{cases}$$

a) Să se alcătuiască tabla lui Cayley a operației date.

b) Să se rezolve ecuațiile $(x \circ 1) \circ x = 2$ şi $(y - 1) \circ (y + 1) = 1$.

❑ **6.** Să se arate că mulțimea M este parte stabilă în raport cu operația specificată.

a) $M = [2, +\infty)$, $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$;

b) $M = [4, 6]$, $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$;

c) $M = (-1, 1)$, $x \circ y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$;

d) $M = [3, +\infty)$, $x \circ y = 2xy - 6(x + y) + 21$.

❑ **7.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc operațiile algebrice $x \circ y = x + y - xy$ şi $x \top y = x - y + 2xy$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Să se rezolve:

a) ecuația $x \circ x = x \top x$;

b) sistemul $\begin{cases} (x+3y) \circ 3 + 19 = 0 \\ (x-2y) \top 2 = -22 \end{cases}$.

8. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc operațiile algebrice $x \top y = x + y - 5$ și $x \perp y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \frac{5}{2}\sqrt[3]{xy}$, $\forall$ x, y $\in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $a = 8 \perp 27$, $b = (64 \perp 1) \top 3$.

b) Să se rezolve ecuația $x \perp 8 = x \top 2$.

c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x \top y = 4 \\ x \perp y = -2 \end{cases}$.

9. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră operația algebrică $A \circ B = AB + A + B$, $\forall$ A, B $\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se determine matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} A \circ I_2 = B \\ A \circ A = B \end{cases}$.

10. Fie $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] = \left\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\right\}$. Să se arate că $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu înmulțirea.

11. Să se arate că mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu înmulțirea:

a) $M = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$;

b) $M = \mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2}\right] = \left\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$;

c) $M = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\right\}$.

12. Să se arate că mulțimile M sunt părți stabile ale mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea:

a) $M = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$;

b) $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$;

c) $M=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ia & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$;

d) $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$;

e) $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q}, a^2+b^2=1\right\}$;

f) $M=\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}, a^2-3b^2=1\right\}$;

g) $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q}, a^2-5b^2=1\right\}$;

h) $M=\left\{\begin{pmatrix} a+10b & -19b \\ 5b & a-10b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q}, a^2-5b^2=1\right\}$;

i) $M=\left\{\begin{pmatrix} a & bi \\ 0 & a+bi \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

❒ **13.** Să se studieze dacă mulțimea M este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea:

a) $M=\{z \in \mathbb{C} \mid z^3=1\}$;

b) $M=\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$;

c) $M=\{z \in \mathbb{C} \mid z^2=\bar{z}\}$;

d) $M=\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1|=1\}$;

e) $M=\{z \in \mathbb{C} \mid z^3=\bar{z}\}$;

f) $M=\{z \in \mathbb{C} \mid z^2=|z|\}$;

g) $M=\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z)=0\}$;

h) $M=\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z)>0\}$.

❒ **14.** Fie $\mathscr{F}(A)=\{f \mid f: A \to A\}$. Să se studieze dacă mulțimea $M \subset \mathscr{F}(A)$ este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor:

a) $M=\{f_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_a(x)=ax+(1-a),\ a \in \mathbb{R}\}$;

b) $M=\{f_1, f_2\}$, $f_1, f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=1-x$;

c) $M=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, $f_i: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\frac{1}{x}$, $f_3(x)=-x$, $f_4(x)=-\frac{1}{x}$.

❒ **15.** Să se arate că mulțimea $M=\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ este parte stabilă în raport cu legea de compoziție $x \circ y=\frac{xy-6}{x+y-5}$, $\forall\ x, y \in M$.

❐ **16.** Fie $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & 4y \\ 5y & 2x \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{N} \right\}$. Să se arate că $\mathcal{M}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu adunarea şi înmulțirea matricelor.

❐ **17.** Se consideră $\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbb{R}, \det(A) \neq 0 \right\}$. Să se studieze dacă mulțimea $\mathcal{M}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu adunarea şi înmulțirea matricelor.

❐ **18.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}_5$ se definesc operațiile $x \circ y = x + y + \hat{2}$ şi $x \,T\, y = \hat{2}x + y - \hat{1}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}_5$. Să se rezolve:

a) ecuațiile $x \circ (x + \hat{1}) = \hat{3}$, $y^2 \circ (y - \hat{1}) = y \,T\, (y + \hat{1})$;

b) sistemele $\begin{cases} x \circ y = \hat{2} \\ x \,T\, y = \hat{1} \end{cases}$, $\begin{cases} (x + y) \,T\, (\hat{2}x - y) = \hat{4} \\ x \circ (y \,T\, x) = \hat{0} \end{cases}$.

❐ **19.** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_4$ ecuațiile:

a) $x^2 + \hat{2}x = \hat{0}$;
b) $\hat{2}x^2 + \hat{3}x = \hat{0}$;
c) $x^3 + \hat{2}x = \hat{0}$;
d) $x^5 + \hat{2}x + \hat{2} = \hat{0}$.

❐ **20.** Fie $\mathcal{P}$ mulțimea funcțiilor polinomiale $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de gradul n, $n \in \mathbb{N}$. Să se studieze dacă mulțimea $\mathcal{M}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{P}$ în raport cu adunarea şi înmulțirea funcțiilor:

a) $M = \{ f \in \mathcal{P} \mid f(x) = f(-x), \forall\, x \in \mathbb{C} \}$;

b) $M = \{ f \in \mathcal{P} \mid f(x) + f(-x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{C} \}$;

c) $M = \{ f \in \mathcal{P} \mid x^2 f(x) = f(x^2), \forall\, x \in \mathbb{C} \}$;

d) $M = \{ f \in \mathcal{P} \mid f(1) = 0 \}$;

e) $M = \{ f \in \mathcal{P} \mid f(i) + f(-i) = 0 \}$.

I.2. Proprietăți ale legilor de compoziție

I.2.1. Proprietatea de comutativitate
Proprietatea de asociativitate

❒ **1.** Să se studieze comutativitatea şi asociativitatea legilor de compoziție "$\circ$" pe mulțimea M, în cazurile:

a) $M = \{1, 2, 3\}$, $x \circ y = \min(x, y)$;

b) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy + x + y$;

c) $M = \mathbb{Q}$, $x \circ y = 2xy + x + y$;

d) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy - 2(x + y) + 2$;

e) $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = xy + i(x + y)$;

f) $M = [4, +\infty)$, $x \circ y = 5xy - 20x - 20y + 84$;

g) $M = (3, 5)$, $x \circ y = xy - 4(x + y) + 20$.

❒ **2.** Pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ se consideră legea de compoziție dată prin tabla lui Cayley alăturată.

$\circ$	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	1	2	3	2
3	1	2	3	2
4	2	1	4	3

a) Să se arate că au loc egalitățile:

$$1 \circ (3 \circ 3) = (1 \circ 3) \circ 3;$$
$$2 \circ (1 \circ 3) = (2 \circ 1) \circ 3;$$
$$4 \circ (4 \circ 2) = (4 \circ 4) \circ 2.$$

b) Legea de compoziție "$\circ$" este comutativă? Dar asociativă?

❒ **3.** Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3\}$ se consideră operația $x \circ y =$ restul împărțirii lui x^{1+y} la 4.

a) Să se alcătuiască tabla lui Cayley a operației.

b) Operația "$\circ$" este comutativă?

c) Operația "$\circ$" este asociativă?

❒ **4.** Să se studieze comutativitatea şi asociativitatea operațiilor algebrice definite pe M, în cazurile:

a) $M = (-\infty, 1)$, $x \circ y = \dfrac{xy - 2}{x + y - 3}$;

b) $M = (1, +\infty)$, $x \circ y = 1 + (x - 1)^{\log_2(y-1)}$;

c) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = \max(x, y)$;

d) $M = \mathbb{Q}$, $x \circ y = \min(x, y)$;

e) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$;

f) $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = ixy$;

g) $M = (0, +\infty)$, $x \circ y = \sqrt{xy}$;

h) $M = (0, +\infty)$, $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$;

i) $M = (-1, 1)$, $x \circ y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$

❒ **5.** Pe mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se defineşte operația algebrică "$\circ$". Să se studieze comutativitatea şi asociativitatea legii "$\circ$", în cazurile:

a) $A \circ B = A + B + 2I_2$;

b) $A \circ B = AB + BA$;

c) $A \circ B = AB \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

d) $A \circ B = AB - 2(A + B) + 2I_2$;

e) $A \circ B = AB - 4A - 4B + 20I_2$.

❒ **6.** Pe mulțimea $\mathbb{Q}$ se consideră operația algebrică $x \circ y = x + y - \frac{1}{2}xy$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}$.

a) Să se arate că mulțimea $M = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Q}$ în raport cu "$\circ$".

b) Să se studieze comutativitatea şi asociativitatea operației induse de "$\circ$" pe M.

c) Să se calculeze $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{n \text{ termeni}}$.

❒ **7.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte operația algebrică $x \circ y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, n impar.

a) Să se studieze asociativitatea operației "$\circ$".

b) Pentru $n = 3$ să se rezolve sistemele de ecuații:

$$\begin{cases} a \circ b \circ (-2) = 1 \\ a^3 + 7 = b^3 \end{cases}, \begin{cases} a \circ b \circ (-3) = 2 \\ a^3 + 19 = b^3 \end{cases}.$$

❒ **8.** Să se determine parametrii reali pentru care următoarele operații algebrice pe M sunt comutative şi asociative:

a) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy + 2(x + y) + a$;

b) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy + ax + by + 6$;

c) $M = \mathbb{Q}$, $x \circ y = x + y + axy$;

d) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy + ax + by + c$;

e) $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = xy + b(x + y) + 2 + ai$.

❒ **9.** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care următoarele operații algebrice pe mulțimea $M \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sunt comutative şi asociative:

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle|\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$, $A \circ B = A + Ba + I_2$;

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}$, $A \circ B = aAB + bBA$;

c) $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A \circ B = AB + aB + bB + 2I_2$;

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & x \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}$, $A \circ B = aAB + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (A+B)$.

❐ **10.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}_5$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + a(x+y) + b$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}_5$. Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_5$ pentru care legea este asociativă.

❐ **11.** Pe mulțimea $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

a) Să se calculeze $(2, 3) \circ (-1, 3)$, $(-1, 0) \circ (0, 1)$.

b) Să se studieze comutativitatea și asociativitatea legii "$\circ$".

I.2.2. Element neutru. Elemente simetrizabile

❐ **1.** Să se determine dacă următoarele operații algebrice pe mulțimea M admit element neutru și să se determine elementele simetrizabile:

a) $M = (-1, +\infty)$, $x \circ y = xy + x + y$;

b) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = 2xy - x - y + 1$;

c) $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = x + y + ixy$;

d) $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = xy + i(x+y) - (1+i)$;

e) $M = (3, +\infty)$, $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$;

f) $M = (-3, +\infty)$, $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.

❐ **2.** Să se verifice dacă următoarele legi de compoziție admit element neutru și să se determine elementele simetrizabile:

a) $M = (2, +\infty)$, $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$;

b) $M = [4, +\infty)$, $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$;

c) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = 2xy + x + y$;

d) $M = [2, +\infty)$, $x \circ y = 3xy - 6(x+y) + 14$;

e) $M = [2, +\infty)$, $x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.

❐ **3.** Fie $M = \{e, a, b\}$ și operația algebrică pe M dată de tabla lui Cayley alăturată.

a) Să se arate că operația nu este asociativă și are element neutru.

b) Să se determine elementele simetrizabile și elementele simetrice ale acestora.

∘	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	a