

LBRIS

Marius Burtea

We know
books

Georgeta Burtea

MATEMATICĂ

Culegere de exerciții și probleme

– clasa a XII-a –

M1

**EDITURA  CARMINIS
PITEȘTI**

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. GRUPURI	3
1.1. Legi de compoziție pe o mulțime	5
1.2. Proprietăți ale legilor de compoziție	10
1.2.1. Proprietatea de comutativitate	
Proprietatea de asociativitate	10
1.2.2. Element neutru. Elemente simetrizabile	12
TESTE DE EVALUARE	15
1.3. Probleme pentru concursuri și examene	17
1.4. Noțiunea de grup. Exemple	20
1.5. Reguli de calcul într-un grup	24
1.6. Probleme pentru concursuri și examene	29
1.7. Morfisme de grupuri	37
1.8. Subgrupuri	45
1.9. Probleme pentru concursuri și examene	50
1.10. Grupuri finite	57
1.11. Probleme pentru concursuri și examene	60
TESTE DE EVALUARE	63
CAPITOLUL II. INELE ȘI CORPURI	66
II.1. Operații algebrice distributive	67
II.2. Inele. Exemple de inele	69
II.3. Reguli de calcul într-un inel	73
II.4. Probleme pentru examene și concursuri	78
II.5. Corpuri	82
II.6. Morfisme de inele și corpuri	85
II.7. Probleme pentru concursuri și examene	86
TESTE DE EVALUARE	88
CAPITOLUL III. INELE DE POLINOAME	90
III.1. Mulțimea polinoamelor cu coeficienți într-un corp Forma algebrică a unui polinom	91
III.2. Operații cu polinoame scrise sub formă algebrică	94
III.2.1. Adunarea și înmulțirea polinoamelor	94
III.2.2. Împărțirea polinoamelor. Schema lui Horner	96
III.3. Divizibilitatea polinoamelor	99
III.4. Probleme pentru examene și concursuri	102
III.5. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili	105
III.5.1. Rădăcini ale polinoamelor	105
III.5.2. Polinoame ireductibile	107
III.6. Relațiile lui Viète	109
III.7. Rezolvarea ecuațiilor algebrice de grad superior	112
III.7.1. Ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	112
III.7.2. Ecuații binome, ecuații reciproce	115
III.8. Probleme pentru concursuri și examene	116
TESTE DE EVALUARE	121

ANALIZĂ MATEMATICĂ

CAPITOLUL I. PRIMITIVE	123
I.1. Primitivele unei funcții. Proprietăți	123
I.2. Metode de calcul pentru primitive	126
I.2.1. Primitive uzuale	126
I.2.2. Formula schimbării de variabilă	129
I.2.3. Formula de integrare prin părți	131
I.3. Probleme pentru concursuri și examene	133
TESTE DE EVALUARE	137
CAPITOLUL II. INTEGRALA DEFINITĂ	142
II.1. Sume Riemann. Funcții integrabile	145
II.2. Formula lui Leibniz-Newton	149
II.3. Clase de funcții integrabile	150
II.4. Proprietăți ale integralei definite	154
II.5. Probleme pentru concursuri și examene	159
TESTE DE EVALUARE	163
II.6. Integrarea funcțiilor continue	165
II.7. Metode de calcul pentru integralele definite	168
II.7.1. Metoda integrării prin părți	168
II.7.2. Prima metodă de schimbare de variabilă	170
II.7.3. A doua metodă de schimbare de variabilă	173
II.8. Calculul integralelor funcțiilor raționale	176
II.8.1. Calculul integralei unei funcții raționale simple	176
II.8.2. Calculul integralei unei funcții raționale oarecare	178
II.9. Probleme pentru concursuri și examene	181
TESTE DE EVALUARE	187
CAPITOLUL III. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE	190
III.1. Aria unei suprafețe plane	190
III.2. Volumul corpurilor de rotație	194
III.3. Calculul limitelor unor șiruri	196
III.4. Probleme pentru concursuri și examene	199
PROBLEME RECAPITULATIVE	201
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	206
INDICE DE AUTOR	276
BIBLIOGRAFIE	278

CAPITOLUL I

GRUPURI

Noțiuni teoretice

♦ Fie M o mulțime nevidă. O aplicație $\varphi : M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$ se numește **lege de compoziție (operație algebrică)** pe mulțimea M .

♦ Fie $n \in \mathbf{N}^*$ și $a \in \mathbf{Z}$. Restul împărțirii lui a la n se notează $a \bmod n$ (se citește "a modulo n") și se numește **redusul modulo n** al numărului a .

♦ Legea de compoziție $\oplus : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, $a \oplus b = (a + b) \bmod n$ se numește **adunarea modulo n**.

♦ Legea de compoziție $\odot : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, $a \odot b = (a \cdot b) \bmod n$ se numește **înmulțirea modulo n**.

♦ Fie $\mathbf{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}\}$ mulțimea claselor de resturi modulo n . Pe mulțimea \mathbf{Z}_n se definesc operațiile algebrice:

"+" : $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n \rightarrow \mathbf{Z}_n$, $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b}$, numită **adunarea claselor de resturi modulo n**;

"·" : $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n \rightarrow \mathbf{Z}_n$, $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b}$, numită **înmulțirea claselor de resturi modulo n**.

♦ Fie M o mulțime și " \circ " o operație algebrică pe M . Submulțimea $S \subset M$ se numește **parte stabilă** a mulțimii M în raport cu operația " \circ " dacă $\forall x, y \in S \Rightarrow x \circ y \in S$.

♦ Legea de compoziția " \circ " se numește **comutativă** pe M dacă $x \circ y = y \circ x$, $\forall x, y \in M$.

♦ Legea de compoziție " \circ " se numește **asociativă** pe M dacă $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $\forall x, y, z \in M$.

O mulțime M înzestrată cu una sau mai multe legi de compoziție care satisfac un set de axiome date sub formă de identități sau alte condiții, formează o **structură algebrică**.

♦ Se numește **semigrup** o pereche (S, \circ) care îndeplinește axioma de asociativitate:

$$S_1 : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in S.$$

Un semigrup (S, \circ) se numește **semigrup comutativ** sau **abelian** dacă îndeplinește axioma de comutativitate:

$$S_2 : x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in S.$$

Legea de compoziție " \circ " admite element neutru pe M dacă există $e \in M$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in M, (1)$.

♦ Elementul $e \in M$ cu proprietatea (1) se numește **element neutru** în raport cu legea " \circ ".

♦ Perechea (M, \circ) se numește **monoid** dacă verifică axiomele:

M_1 : Axioma asociativității: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in M$.

M_2 : Axioma elementului neutru: $\exists e \in M$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in M$.

♦ Un monoid (M, \circ) se numește **monoid comutativ** sau **abelian** dacă legea " \circ " este comutativă.

♦ Un element $x \in M$ se numește **simetrizabil** în raport cu legea " \circ " dacă $\exists x' \in M$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = e, (2)$.

Elementul $x' \in M$ cu proprietatea (2) se numește **simetricul** lui $x \in M$ în raport cu legea " \circ ".

Se notează cu $\mathcal{U}(M)$ mulțimea elementelor din M simetrizabile în raport cu legea " \circ ".

Au loc egalitățile:

$$(x')' = x \text{ și } (x \circ y)' = y' \circ x', \forall x, y \in \mathcal{U}(M).$$

♦ Perechea (G, \circ) se numește **grup** dacă au loc axiomele:

G_1 : Axioma monoidului: (G, \circ) este monoid.

G_2 : Axioma elementelor simetrizabile: $\forall x \in G, \exists x' \in G$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = e$.

Un grup (G, \circ) se numește **comutativ (abelian)** dacă legea " \circ " este comutativă.

♦ Un grup (G, \circ) se numește **grup finit** dacă mulțimea G este mulțime finită. Cardinalul mulțimii G se numește **ordinul grupului** și se notează cu $\text{ord}(G)$.

Fie $a \in G$ și $n \in \mathbf{Z}$. Se notează $a^0 = e, a^n = \underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{n \text{ ori}}$, pentru $n > 0$ și

$a^n = \underbrace{a' \circ a' \circ \dots \circ a'}_{-n \text{ ori}}$, dacă $n < 0$.

Au loc relațiile: $a^m \circ a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, \forall a \in G, m, n \in \mathbf{Z}$.

♦ Fie (G_1, \circ) și $(G_2, *)$ două grupuri.

Funcția $f: G_1 \rightarrow G_2$ se numește **morfism de grupuri** dacă $f(x \circ y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in G_1$ și **izomorfism de grupuri** dacă funcția f este și funcție bijectivă.

Grupurile (G_1, \circ) și $(G_2, *)$ se numesc **izomorfe** și se scrie $G_1 \cong G_2$ dacă există un izomorfism $f : G_1 \rightarrow G_2$.

Un izomorfism $f : G \rightarrow G$ se numește **automorfism** al grupului G . Mulțimea automorfismelor lui G se notează $\text{Aut}(G)$.

Un morfism $f : G \rightarrow G$ se numește **endomorfism** al grupului G .

Dacă $f : G_1 \rightarrow G_2$ este morfism de grupuri, au loc relațiile $\forall x \in G$ și $n \in \mathbf{Z}$:

$$\text{a) } f(e) = e'; \quad \text{b) } f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}; \quad \text{c) } f(x^n) = (f(x))^n.$$

♦ O submulțime $S \subset G$ se numește **subgrup** al lui (G, \circ) dacă (S, \circ) este grup.

Submulțimea $S \subset G$ este subgrup al lui (G, \circ) dacă $\forall x, y \in S \Rightarrow xy^{-1} \in G$.

Fie (G, \circ) un grup. Mulțimea $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ reprezintă subgrupul generat de elementul $a \in G$. Ordinul subgrupului $\langle a \rangle$ se numește **ordinul elementului** a și se notează $\text{ord}(a)$.

Ordinul elementului $a \in G$ este cel mai mic număr $n \in \mathbf{N}^*$, pentru care $a^n = e$.

♦ Teorema lui Lagrange

Fie (G, \cdot) un grup finit, $H \subset G$ un subgrup și $a \in G$. Atunci:

a) $\text{ord}(H)$ divide $\text{ord}(G)$;

b) $\text{ord}(a)$ divide $\text{ord}(G)$.

♦ Teorema lui Cauchy

Fie (G, \cdot) un grup finit, $n = \text{ord}(G)$ și p un divizor număr prim al lui n . Atunci există $a \in G$ astfel încât $p = \text{ord}(a)$.

Fie $m, n \in \mathbf{N}^*$. Atunci $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}_{mn}$ dacă și numai dacă $(m, n) = 1$.

1.1. Legei de compoziție pe o mulțime

□ 1. Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3\}$ se definește operația algebrică $x \circ y = \max(x, y)$.

a) Să se rezolve ecuațiile $x \circ 2 = 3$ și $(y^2 - 2) \circ y = 2$.

b) Să se alcătuiască tabla lui Cayley a operației " \circ ".

□ 2. Să se alcătuiască tabla operației algebrice pe mulțimea M în cazurile:

a) $M = \{2, 3, 4, 6, 8\}$, $x \circ y = \min(x, y)$;

b) $M = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, $x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$;

c) $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $x \circ y = |x - y|$;

d) $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $x \circ y = \frac{x+y+|x-y|}{2}$;

e) $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-2| \leq 3\}$, $x \circ y = \text{sign}(x+y)$;

f) $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x-1| \leq 7\}$, $x \circ y = \begin{cases} x, & x+y \leq 7 \\ y, & x+y > 7 \end{cases}$.

□ 3. Pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ se consideră legea de compoziție "o" a cărei tablă este dată alăturat.

o	1	2	3	4
1	1	3	4	1
2	1	3	4	2
3	2	1	3	4
4	4	3	2	1

a) Să se determine elementele

$a = 1 \circ (2 \circ 3)$, $b = 4 \circ (3 \circ 2)$, $c = (1 \circ 2) \circ (3 \circ 4)$.

b) Să se rezolve ecuațiile:

$x \circ 2 = 4$, $4 \circ y = 2$, $z \circ 2 \circ z = 1$.

c) Să se rezolve sistemele de ecuații: $\begin{cases} x \circ 2 = y \\ y \circ 2 = x \end{cases}$; $\begin{cases} x \circ y = 1 \\ (x+1) \circ y = 1 \end{cases}$.

□ 4. Pe mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset \mathbb{N}$, se consideră operațiile algebrice:

$x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$ și $x \top y = |x - y|$.

a) Să se rezolve ecuațiile: $x \circ 4 = 2$, $y \circ 3 = 1$, $4 \circ z = 2$, $t \top 6 = t \circ 6$.

b) Să se rezolve sistemele de ecuații: $\begin{cases} x \circ y = y \\ x \circ 4 = y \top 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \top y = 0 \\ (x \circ y) \top 4 = 2 \end{cases}$.

□ 5. Pe mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N} \mid |x-1| \leq 4\}$ se consideră operația algebrică

$$x \circ y = \begin{cases} x - y, & x > 3 \text{ și } y \leq 3 \\ x + |x - y|, & x \leq 3 \text{ sau } y > 3. \\ 0, & x = 5 \text{ și } y = 4 \end{cases}$$

a) Să se alcătuiască tabla lui Cayley a operației date.

b) Să se rezolve ecuațiile $(x \circ 1) \circ x = 2$ și $(y - 1) \circ (y + 1) = 1$.

□ 6. Să se arate că mulțimea M este parte stabilă în raport cu operația specificată.

a) $M = [2, +\infty)$, $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$;

b) $M = [4, 6]$, $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$;

c) $M = (-1, 1)$, $x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$;

d) $M = [3, +\infty)$, $x \circ y = 2xy - 6(x+y) + 21$.

□ 7. Pe mulțimea \mathbb{R} se definesc operațiile algebrice $x \circ y = x + y - xy$ și $x \top y = x - y + 2xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se rezolve:

a) ecuația $x \circ x = x \top x$;

b) sistemul
$$\begin{cases} (x+3y) \circ 3 + 19 = 0 \\ (x-2y) \top 2 = -22 \end{cases}$$

□ 8. Pe mulțimea \mathbb{R} se definesc operațiile algebrice $x \top y = x + y - 5$ și $x \perp y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \frac{5}{2}\sqrt[3]{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $a = 8 \perp 27$, $b = (64 \perp 1) \top 3$.

b) Să se rezolve ecuația $x \perp 8 = x \top 2$.

c) Să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} x \top y = 4 \\ x \perp y = -2 \end{cases}$$

□ 9. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră operația algebrică $A \circ B = AB + A + B$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se determine matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} A \circ I_2 = B \\ A \circ A = B \end{cases}$$

□ 10. Fie $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$. Să se arate că $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ este parte stabilă a mulțimii \mathbb{R} în raport cu înmulțirea.

□ 11. Să se arate că mulțimea M este parte stabilă a mulțimii \mathbb{R} în raport cu înmulțirea:

a) $M = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;

b) $M = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$;

c) $M = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.

□ 12. Să se arate că mulțimile M sunt părți stabile ale mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulțirea:

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

$$c) M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ia & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\};$$

$$d) M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\};$$

$$e) M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 = 1 \right\};$$

$$f) M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 - 3b^2 = 1 \right\};$$

$$g) M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 5b^2 = 1 \right\};$$

$$h) M = \left\{ \begin{pmatrix} a+10b & -19b \\ 5b & a-10b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 5b^2 = 1 \right\};$$

$$i) M = \left\{ \begin{pmatrix} a & bi \\ 0 & a+bi \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

□ 13. Să se studieze dacă mulțimea M este parte stabilă a lui \mathbb{C} în raport cu înmulțirea:

$$a) M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\};$$

$$b) M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\};$$

$$c) M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = \bar{z}\};$$

$$d) M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\};$$

$$e) M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = \bar{z}\};$$

$$f) M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = |z|\};$$

$$g) M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\};$$

$$h) M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

□ 14. Fie $\mathcal{F}(A) = \{f \mid f: A \rightarrow A\}$. Să se studieze dacă mulțimea $M \subset \mathcal{F}(A)$ este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor:

$$a) M = \{f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_a(x) = ax + (1-a), a \in \mathbb{R}\};$$

$$b) M = \{f_1, f_2\}, f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x, f_2(x) = 1-x;$$

$$c) M = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}, f_i: \mathbb{R}^\circ \rightarrow \mathbb{R}^\circ, f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = -x, f_4(x) = -\frac{1}{x}.$$

□ 15. Să se arate că mulțimea $M = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ este parte stabilă în raport cu legea de

$$\text{compoziție } x \circ y = \frac{xy - 6}{x + y - 5}, \forall x, y \in M.$$

LIBRIS | We know books

□ 16. Fie $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & 4y \\ 5y & 2x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{N} \right\}$. Să se arate că \mathcal{M} este parte stabilă a mulțimii

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

□ 17. Se consideră $\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, \det(A) \neq 0 \right\}$. Să se studieze dacă

mulțimea \mathcal{M} este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

□ 18. Pe mulțimea \mathbb{Z}_5 se definesc operațiile $x \circ y = x + y + \hat{2}$ și $x \top y = \hat{2}x + y - \hat{1}$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_5$. Să se rezolve:

a) ecuațiile $x \circ (x + \hat{1}) = \hat{3}$, $y^2 \circ (y - \hat{1}) = y \top (y + \hat{1})$;

b) sistemele $\begin{cases} x \circ y = \hat{2} \\ x \top y = \hat{1} \end{cases}$ $\begin{cases} (x + y) \top (\hat{2}x - y) = \hat{4} \\ x \circ (y \top x) = \hat{0} \end{cases}$

□ 19. Să se rezolve în \mathbb{Z}_4 ecuațiile:

a) $x^2 + \hat{2}x = \hat{0}$;

b) $\hat{2}x^2 + \hat{3}x = \hat{0}$;

c) $x^3 + \hat{2}x = \hat{0}$;

d) $x^5 + \hat{2}x + \hat{2} = \hat{0}$.

□ 20. Fie \mathcal{P} mulțimea funcțiilor polinomiale $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de gradul n , $n \in \mathbb{N}$. Să se studieze dacă mulțimea \mathcal{M} este parte stabilă a mulțimii \mathcal{P} în raport cu adunarea și înmulțirea funcțiilor:

a) $M = \{f \in \mathcal{P} \mid f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{C}\}$;

b) $M = \{f \in \mathcal{P} \mid f(x) + f(-x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}\}$;

c) $M = \{f \in \mathcal{P} \mid x^2 f(x) = f(x^2), \forall x \in \mathbb{C}\}$;

d) $M = \{f \in \mathcal{P} \mid f(1) = 0\}$;

e) $M = \{f \in \mathcal{P} \mid f(i) + f(-i) = 0\}$.

1.2. Proprietăți ale legilor de compoziție

1.2.1. Proprietatea de comutativitate

Proprietatea de asociativitate

- 1. Să se studieze comutativitatea și asociativitatea legilor de compoziție "o" pe mulțimea M, în cazurile:
- $M = \{1, 2, 3\}$, $x \circ y = \min(x, y)$;
 - $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy + x + y$;
 - $M = \mathbb{Q}$, $x \circ y = 2xy + x + y$;
 - $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy - 2(x + y) + 2$;
 - $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = xy + i(x + y)$;
 - $M = [4, +\infty)$, $x \circ y = 5xy - 20x - 20y + 84$;
 - $M = (3, 5)$, $x \circ y = xy - 4(x + y) + 20$.

- 2. Pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ se consideră legea de compoziție dată prin tabla lui Cayley alăturată.

o	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	1	2	3	2
3	1	2	3	2
4	2	1	4	3

- a) Să se arate că au loc egalitățile:

$$1 \circ (3 \circ 3) = (1 \circ 3) \circ 3;$$

$$2 \circ (1 \circ 3) = (2 \circ 1) \circ 3;$$

$$4 \circ (4 \circ 2) = (4 \circ 4) \circ 2.$$

- b) Legea de compoziție "o" este comutativă? Dar asociativă?

- 3. Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3\}$ se consideră operația $x \circ y = \text{restul împărțirii lui } x^{1+y} \text{ la } 4$.
- Să se alcătuiască tabla lui Cayley a operației.
 - Operația "o" este comutativă?
 - Operația "o" este asociativă?

- 4. Să se studieze comutativitatea și asociativitatea operațiilor algebrice definite pe M, în cazurile:

a) $M = (-\infty, 1)$, $x \circ y = \frac{xy - 2}{x + y - 3}$;

b) $M = (1, +\infty)$, $x \circ y = 1 + (x - 1)^{\log_2(y-1)}$;

c) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = \max(x, y)$;

d) $M = \mathbb{Q}$, $x \circ y = \min(x, y)$;

e) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = \frac{x + y + |x - y|}{2}$;

f) $M = \mathbb{C}, x \circ y = ixy;$

g) $M = (0, +\infty), x \circ y = \sqrt{xy};$

h) $M = (0, +\infty), x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3};$

i) $M = (-1, 1), x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$

□ 5. Pe mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se definește operația algebrică " \circ ". Să se studieze comutativitatea și asociativitatea legii " \circ ", în cazurile:

a) $A \circ B = A + B + 2I_2;$

b) $A \circ B = AB + BA;$

c) $A \circ B = AB \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$

d) $A \circ B = AB - 2(A + B) + 2I_2;$

e) $A \circ B = AB - 4A - 4B + 20I_2.$

□ 6. Pe mulțimea \mathbb{Q} se consideră operația algebrică $x \circ y = x + y - \frac{1}{2}xy, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$

a) Să se arate că mulțimea $M = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ este parte stabilă a lui \mathbb{Q} în raport cu " \circ ".

b) Să se studieze comutativitatea și asociativitatea operației induse de " \circ " pe $M.$

c) Să se calculeze $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ termeni}}.$

□ 7. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește operația algebrică $x \circ y = \sqrt[n]{x^n + y^n}, \forall x, y \in \mathbb{R},$ n impar.

a) Să se studieze asociativitatea operației " \circ ".

b) Pentru $n = 3$ să se rezolve sistemele de ecuații:

$$\begin{cases} a \circ b \circ (-2) = 1 \\ a^3 + 7 = b^3 \end{cases}, \begin{cases} a \circ b \circ (-3) = 2 \\ a^3 + 19 = b^3 \end{cases}$$

□ 8. Să se determine parametri reali pentru care următoarele operații algebrice pe M sunt comutative și asociative:

a) $M = \mathbb{R}, x \circ y = xy + 2(x + y) + a;$

b) $M = \mathbb{R}, x \circ y = xy + ax + by + 6;$

c) $M = \mathbb{Q}, x \circ y = x + y + axy;$

d) $M = \mathbb{R}, x \circ y = xy + ax + by + c;$

e) $M = \mathbb{C}, x \circ y = xy + b(x + y) + 2 + ai.$

□ 9. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care următoarele operații algebrice pe mulțimea $M \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sunt comutative și asociative:

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}, A \circ B = A + Ba + I_2;$

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}, A \circ B = aAB + bBA;$

c) $M = M_2(\mathbb{C}), A \circ B = AB + aB + bA + 2I_2;$

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, A \circ B = aAB + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (A+B).$

- 10. Pe mulțimea \mathbb{Z}_5 se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + a(x+y) + b, \forall x, y \in \mathbb{Z}_5$. Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_5$ pentru care legea este asociativă.
- 11. Pe mulțimea $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
- a) Să se calculeze $(2, 3) \circ (-1, 3), (-1, 0) \circ (0, 1)$.
- b) Să se studieze comutativitatea și asociativitatea legii "o".

1.2.2. Element neutru. Elemente simetrizabile

- 1. Să se determine dacă următoarele operații algebrice pe mulțimea M admit element neutru și să se determine elementele simetrizabile:
- a) $M = (-1, +\infty), x \circ y = xy + x + y;$
- b) $M = \mathbb{Z}, x \circ y = 2xy - x - y + 1;$
- c) $M = \mathbb{C}, x \circ y = x + y + ixy;$
- d) $M = \mathbb{C}, x \circ y = xy + i(x+y) - (1+i);$
- e) $M = (3, +\infty), x \circ y = xy - 3x - 3y + 12;$
- f) $M = (-3, +\infty), x \circ y = xy + 3x + 3y + 6.$
- 2. Să se verifice dacă următoarele legi de compoziție admit element neutru și să se determine elementele simetrizabile:
- a) $M = (2, +\infty), x \circ y = xy - 2x - 2y + 6;$
- b) $M = [4, +\infty), x \circ y = xy - 4x - 4y + 20;$
- c) $M = \mathbb{Z}, x \circ y = 2xy + x + y;$
- d) $M = [2, +\infty), x \circ y = 3xy - 6(x+y) + 14;$
- e) $M = [2, +\infty), x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2} - 4.$
- 3. Fie $M = \{e, a, b\}$ și operația algebrică pe M dată de tabla lui Cayley alăturată.
- | | | | |
|---|---|---|---|
| o | e | a | b |
| e | e | a | b |
| a | a | e | e |
| b | b | e | a |
- a) Să se arate că operația nu este asociativă și are element neutru.
- b) Să se determine elementele simetrizabile și elementele simetrice ale acestora.